SUR LE POINT DE REBROUSSEMENT DE LA SECONDE ESPECE

*de Mr. le Marquis de l'*HÔPITAL,

PAR M. EULER.

§. I.

J'ai déjà fait voir dans quelques pieces, que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Academie Royale, que même la Geometrie n'eſt pas exemte des controverſes, & des contradictions apparentes, quoiqu'on ſoutienne fort ſouvent le contraire. Mais j'ai auſſi fait remarquer ce grand avantage de la Geometrie, que ces difficultés peuvent être applanies, en ſorte qu'il n'y reſte plus le moindre doute ; pourvu qu'on examine bien à fond toutes les circonſtances du ſujet, ſur lequel les controverſes roulent. Dans ce diſcours je m'en vais entretenir l'Aſſemblée encore ſur une controverſe de la pure Geometrie, qui regarde une certaine eſpece de points de rebrouſſement, ſemblables à un bec d'oiſeau, & formés de deux branches d'une courbe, qui tournent leur concavité du même coté, au lieu que les deux branches d'une courbes, qui forment des points de rebrouſſement ordinaires, ſont courbées en divers ſens. Planches II. & III.

§. 2. Mr. le Marquis de l'Hopital, dans ſon Analyſe des infiniment petits, nomme ces points de rebrouſſement à bec d'oiſeau, *de la ſeconde eſpece*, & il ſoutient qu'il y a une infinité de courbes tant algebriques que tranſcendantes, qui ſont pourvuës d'un tel point de rebrouſſement. Il prouve cela par la Theorie de l'evaluation en cette maniere. Soit ABC une courbe quelconque, qui ait en B un point *Fig* 1.

d'infléxion,& qu'on plie autour de cette courbe un fil, qu'on develope enſuite en le tirant au point A ſucceſſivement, juſqu'à ce qu'il vienne ſe détacher du point d'infléxion B, & l'extremité A décrira par cette évolution l'arc AD, auquel le fil détaché BD ſera perpendiculaire & ſon rayon de courbure, comme on ſait par la theorie de l'evolution. Mais ſi l'on continue cette évolution au delà du point B, le fil BD rebrouſſera chemin, & venant dans la ſituation M N, ſon extremité décrira l'arc DN, qui ſera par conſéquent la continuation de l'arc AD. Or ces deux arcs AD, DN, qui au point D forment un angle infiniment petit, tournent leur concavité du même coté. Donc cette courbe ADN décrite par l'évolution de la ligne ABC aura au point D un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece; comme le Marquis de l'Hopital l'apelle.

§. 3. Quelque ſolide que paroiſſe cette démonſtration, M. Guà de Malves dans ſon traité : *Uſage de l'Analyſe de Des-Cartes pour decouvrir les propriétés des lignes geometriques de tous les Ordres :* eſt d'un ſentiment tout à fait contraire, & ſoutient qu'il n'y a aucune courbe, dont une branche s'etant étenduë de A & D, puiſſe ſubitement rebrouſſer chemin, & venir dans la ſituation DN, ſans qu'elle change en meme tems de courbure, ou ſans qu'elle devienne convexe, ayant auparavant été concave en même ſens. Pour l'epreuve que M. le Marquis de l'Hopital donne, il ne nie pas, que la courbe formée de cette façon n'ait la figure repréſentée: mais il prétend, que la branche DN n'eſt pas la continuation de la branche AD, bien qu'elle ſoit décrite par le même mouvement d'evolution. Il eſt donc obligé de dire, qu'il n'eſt pas permis de juger de la continuité d'une courbe, par la continuité de ſa deſcription. Cette exception paroitra ſans doute fort étrange, & j'avouë que, ſi elle étoit fondée, elle renverſeroit la pluſpart des marques, par leſquelles nous croyons pouvoir avec aſſurance juger de la figure des lignes courbes.

§. 4. M. Guà ne reconnoit que l'équation analytique, de laquelle on puiſſe tirer une exacte connoiſſance de la figure d'une ligne courbe,

be, du nombre de ſes branches & de leur continuité. Il croit avoir démontré dans ſon Ouvrage, que toutes les fois qu'il ſe trouve un tel point de rebrouſſement dans une ligne courbe, elle eſt encore défectueuſe: & que ſi l'on en acheve la deſcription ſuivant l'équation qui exprime ſa nature, la figure provient toujours telle, que la 2 fig. repréſente: c'eſt à dire, que le bec d'oiſeau deviendra doublé A D M & a D n, & que ce n'eſt plus l'arc D N, qui ſoit la continuation de l'arc A D, mais l'arc D *a*; de ſorte que le point D ne ſoit que l'interſection de deux branches, A D *a* & N D *n*, qui ſe coupent en D ſous un angle infiniment petit, & qui tournent leur concavité du même coté. On pourroit auſſi dire, que ce ſont deux branches d'une même ligne courbe A D *n* & N D *a*, qui ſe touchent enſemble au point D, & alors il ſeroit incertain, ſi l'arc D *n* ou l'arc D *a* ſeroit la continuation de l'arc A D. *Fig. 2.*

§. 5. Pour prouver cette theſe, il tire par le point D la tangente E D *e*, qu'il prend pour l'axe, ſur lequel il poſe l'abſciſſe D P $=$ *x* & l'appliquée P M $=$ *y*. Maintenant quelle que ſoit l'équation pour la courbe, ſi l'on prend l'abſciſſe *x* fort petite, la valeur de *y* ſe pourra toujours exprimer par une ſerie convergente de cette forme: *Fig. 3.*

$$y = \frac{xx}{2a} \pm Ax^{m} \pm Bx^{n} \pm Cx^{k} \text{ \&c.}$$

où les expoſans *m*, *n*, *k* &c. croiſſent de plus en plus, & ſont des nombres, ou entiers, ou rompus; & s'il y en a des fractions, dont le dénominateur eſt un nombre pair, les valeurs de ces termes ſeront ambigues, & ce ſera le cas où pluſieurs branches de la courbe viennent toucher l'axe E *e* au point D. Or le premier terme où la plus baſſe puiſſance de *x* ſera $\frac{xx}{2a}$, ſi le rayon de la courbure en D eſt ſuppoſé $=$ *a*.

§. 6. Cela remarqué il ſuppoſe l'abſciſſe *x* infiniment petite pour connoitre le train de la courbe au point D, & dans ce cas, dit-il, évanouïront tous les termes Ax^{m}, Bx^{n}, Cx^{k} &c. par rapport au

premier $\frac{xx}{2a}$, puisque leurs exposans sont plus grands que 2; de sorte que pour la courbe au point D il ne reste que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$. qui en exprimera le train ou la route, que la courbe suit en deçà & en delà du point D, pourvû que l'abscisse x demeure infiniment petite. Or dans ce cas il est clair, que l'équation $y = \frac{xx}{2a}$ reste la même, soit qu'on prenne x affirmative ou negative: & partant il conclud, que la courbe aura toujours auprès du point D la forme M D m; & que par-conséquent l'arc A D doit prendre sa continuation vers D m. Cela doit s'entendre, lorsque la courbure en D est finie, ce qui arrive dans notre cas; car si la courbure étoit, ou infinie, ou infiniment petite, ce raisonnement perdroit sa force.

§. 7. Ce sont les raisons dont M. Guà de Malves combat l'idée de M. le Marquis de l'Hopital sur les points de rebroussement de la seconde espece; & si l'on pese les argumens de part & d'autre, on les trouvera si forts, qu'il paroit presque inévitable de reconnoitre une contradiction entre la description faite par l'evolution, & l'équation de la courbe; l'une nous montrant très clairement que la continuation de
Fig. 2. l'arc A D doit passer en rebroussant par D N; tandisque l'autre nous persuade, que cette continuation doit absolument se faire par D n ou D a. Néanmoins je prouverai par des raisons inconteſtables, qu'il n'y a pas ici la moindre dissension entre la description mecanique & le calcul; mais qu'il s'est glissé dans le raisonnement de M. Guà, tout solide qu'il puisse paroitre d'ailleurs, une petite inadvertence; qui étant remarquée, cette contradiction disparoitra d'abord entierement.

§. 8. Car quoiqu'il soit vrai, que dans une telle équation $y = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + D x^{\delta} +$ &c. où les exposans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. sont des nombres affirmatifs allant en croissant, on peut négliger par rapport au premier terme les suivans, lorsqu'on suppose x infini-

infiniment petit, tant affirmatif que negatif, & que dans ce cas on n'a qu'à conſiderer cette équation $y = A x^{\alpha}$; néanmoins il faut bien remarquer, que cette omiſſion des termes ne peut avoir lieu, qu'aux cas, où ces termes ont tous des valeurs réelles, quoiqu'elles ſoient infiniment petites. Car ſi un ſeul terme de ceux qu'on rejette étoit imaginaire, toute l'expreſſion, & par conſéquent la valeur de y le ſeroit auſſi: donc on auroit grand tort, ſi l'on mettoit $y = A x^{\alpha}$ ou à une quantité réelle. Et partant la régle reçue, par laquelle on fait évanouïr par raport au premier terme les ſuivans, demande cette reſtriction, que les termes à omettre ne ſoient pas imaginaires.

§. 9. Mr. Guà de Malves n'a pas pris garde à cette limitation abſolument néceſſaire, & c'eſt de là, que ſa pretenduë contradiction dans le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece a tiré ſon origine. Pour éclaircir cela mieux, ſoit propoſée cette équation $y = x + x\sqrt{x}\sqrt{-1}$; & on verra d'abord que la valeur de y eſt toujours imaginaire, excepté le ſeul cas ou $x = o$, auquel devient auſſi $y = o$. Ainſi cette équation ne déſigne qu'un ſeul point ſitué ſur l'axe au commencement des abſciſſes x. Mais ſi nous voulions juger de la courbe exprimée par cette équation, ſuivant la methode de Mr. Guà, en ſuppoſant l'abſciſſe x infiniment petite, nous n'aurions qu'à conſidérer cette équation $y = x$, & nous en conclurrions, que cette courbe ſe confond au commencement avec une droite exprimée par $y = x$; ce qui ſeroit pourtant contraire à la vérité. Cependant cette concluſion ſeroit bien juſte, ſi le coëfficient de $x\sqrt{x}$, au lieu d'etre imaginaire, eut été une quantité réelle quelconque.

§. 10. Or il peut arriver, qu'une branche de la courbe évanouït, ou devient imaginaire, quand même aucun terme de l'équation n'eſt affecté ouvertement par une quantité imaginaire. Car conſidérons la courbe dont l'équation eſt $y = x + x\sqrt{x}$, & ſuppoſons x infiniment petit tant affirmatif, que negatif. Dans le premier cas le terme $x\sqrt{x}$ étant réel, & infiniment plus petit que x, on le pourra négliger pour avoir

avoir $y = x$, qui repréſente le commencement de la courbe vers la région des abſciſſes poſitives. Mais dès qu'on prend x negatif, quoiqu'infiniment petit, le terme $x\sqrt{x}$ devenant imaginaire, rendra auſſi la valeur de y imaginaire; & partant dans ce cas il ne ſera plus permis d'enviſager l'équation $y = x$ au lieu de $y = x + x\sqrt{x}$. Cette courbe ne s'étend donc pas dans la région des abſciſſes negatives, mais elle aura deux branches vers la région des affirmatives ſelon la double valeur de $\pm x\sqrt{x}$, qui forment un point de rebrouſſement de la premiere eſpece. Il eſt clair que c'eſt la parabole cubique ſeconde.

§. 11. Un tel point de rebrouſſement ordinaire ſe trouvera auſſi dans cette équation plus générale $y = \alpha x + \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$, toutes les fois que m ſera un nombre impair, & n pair affirmatif. Car dans ce cas la valeur du terme $\mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$ ſera ambiguë, & on aura $y = \alpha x \pm \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$. Pour trouver la forme de cette courbe, on n'a qu'à tirer la droite AL, que prenant l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PL devienne $= \alpha x$. Enſuite qu'on prenne ſur PL prolongée $LM = LN = \mathcal{C} x^{1+\frac{m}{n}}$, qui ſera infiniment plus petit que x, ſi x eſt infiniment petit, & la courbe paſſera par les points M & N, qui ſe réüniſſent au point A. Donc la courbe aura deux branches AM & AN, dont chacune eſt convexe vers AL, & qui formeront par conſéquent un point de rebrouſſement MAN de la premiere eſpece : car cette courbe ne s'etendra pas dans la région des abſciſſes negatives, puisque mettant x negative, l'appliquée y devient imaginaire.

Fig. 4.

§. 12. La meme choſe peut arriver dans des courbes, qui ſemblent à M. Guà ne pouvoir admettre un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. On n'a qu'à conſidérer cette équation $y = \alpha x x \pm \mathcal{C} x x \sqrt{x}$, laquelle devient imaginaire dès qu'on met x negatif, & partant

partant il eſt ſur, que cette courbe n'a aucune partie dans la région des abſciſſes negatives. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à conſtruire ſur l'axe AP une parabole AL, qui répond à l'équation $y = \alpha xx$, & nommant $AP = x$ on aura $PL = \alpha xx$. Qu'on prenne enſuite $LM = LM = 6xx\sqrt{x}$, & les points M & N ſeront dans la courbe cherchée; & puisqu'en ſuppoſant x infiniment petit, les parties LM & LN ſont infiniment plus petites que PL, l'une & l'autre branche AM & AN ſe confondra au commencement A avec la parabole AL, & aura la même courbure, & tournera par conſéquent ſa convexité vers l'axe AP; deſorte que ces deux branches MA & NA formeront en A un vrai point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. *Fig. 5.*

§. 13. De là il eſt clair, que quoiqu'on ſuppoſe l'abſciſſe x infiniment petite, il n'eſt pas permis de négliger le terme $6xx\sqrt{x}$ par rapport à αxx, que lorsque x eſt priſe affirmative; & qu'au cas, que x eſt priſe negative, l'équation $y = \alpha xx$ ne pourra plus être employée pour $y = \alpha xx \pm \beta xx\sqrt{x}$; puisque celle-là montreroit une valeur réelle de y, qui eſt pourtant, à cauſe du ſecond terme, imaginaire. Par conſéquent le raiſonnement de M. Guà n'a plus lieu dans ce cas, quand il prétend, que l'équation $y = \alpha xx$ puiſſe être employée pour connoitre la forme de la courbe près du point A; d'où il s'enſuivroit ſans doute, que la courbe s'étendroit dans la region des abſciſſes negatives: car l'autre terme négligé $\beta xx\sqrt{x}$ nous fait connoitre, que les appliquées y deviennent alors imaginaires. Il n'eſt donc pas permis de négliger ce terme par rapport à αxx, que tandis que ſa valeur ne devient pas imaginaire, quoiqu'on prenne x infiniment petite.

§. 14. Ayant ainſi trouvé une courbe, qui a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, il ſera facile de s'imaginer une infinité d'autres courbes, dans lesquelles il ſe trouve un pareil point de rebrouſſement. Car à l'équation $y = \alpha xx \pm \beta xx\sqrt{x}$ on pourra ajouter autant de puiſſances de x qu'on voudra, pourvû que leurs expoſants ſoient des nombres affirmatifs plus grands que 2; puisque tous ces termes évanouiront egalement par rapport au premier αxx, pourvu qu'on

qu'on ſuppoſe x infiniment petite, mais affirmative. Car pour les valeurs negatives de x le ſeul terme $\beta x x \sqrt{x}$ rend cette hypotheſe inutile. De plus on pourra encore ajouter ce terme xxP, pour avoir

$$y = \alpha x x \pm \beta x x \sqrt{x} + xxP$$

ſi P marque une fonction quelconque de x, qui évanouïſſe en faiſant $x = 0$.

§. 15. Il eſt à remarquer, que toutes ces courbes, qui ſont contenuës dans cette équation generale, auront au point de rebrouſſement A leur courbure finie, ou le rayon de la dévelopée y ſera fini; tout comme cela arrive dans les courbes, que M. le Marquis de l'Hopital a formées pour démontrer l'exiſtence du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Il ſera à propos de rapporter ici quelques courbes des plus ſimples de cette nature.

$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt{x}$ du 5me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt{x}$ du 7me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^4 \sqrt{x}$ du 9me ordre
$y = \alpha x x + \beta x^5 \sqrt{x}$ du 11me ordre
&c.

qui toutes ont au commencement où $x = 0$, un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, & le rayon de la developée eſt dans ce point d'une quantité finie.

§. 16. On peut rendre ces formules encore plus générales ſans augmenter le nombre des termes, en employant un autre ſigne radical, dont l'expoſant eſt un nombre pair, afin que la valeur ſoit ambigue: ainſi nous aurons ces équations:

	ou
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[4]{x^3}$	$y = \alpha x x + \beta x x \sqrt[6]{x^5}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x}$
$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[4]{x}$	$y = \alpha x x + \beta x^3 \sqrt[6]{x^5}$
&c.	&c.

Toutes

Toutes ces formules ſeront compriſes dans cette générale $y = \alpha xx + \beta x^{2+\frac{m}{n}}$, où m marque un nombre affirmatif impair, & n un nombre affirmatif pair quelconque. Le rayon de la dévelopée ſera dans toutes ces courbes au point de rebrouſſement fini.

§. 17. Au lieu du premier terme αxx on pourra auſſi prendre une autre puiſſance de x plus haute, & alors le rayon de la dévelopée au point de rebrouſſement ſera infiniment grand, comme dans ces formules

$$y = \alpha x^3 + \beta x^{3+\frac{m}{n}}$$

$$y = \alpha x^4 + \beta x^{4+\frac{m}{n}}$$

$$y = \alpha x^5 + \beta x^{5+\frac{m}{n}}$$

&c.

ou plus généralement $y = \alpha x^k + \beta x^{k+\frac{m}{n}}$, où k marque un nombre entier plus grand que 1, & les valeurs de m & n demeurent comme dans l'article précédent. Car ſi k étoit $= 1$, le point de rebrouſſement deviendroit de la première eſpece. Il n'eſt pas auſſi néceſſaire que k ſoit un nombre entier, il peut être un nombre rompu, pourvû que la puiſſance x^k n'acquerre pas une valeur ambigue, qui puiſſe être auſſi bien negative qu'affirmative.

§. 18. L'expoſant k peut auſſi être un tel nombre rompu moindre que 2, pourvu qu'il ſoit plus grand que 1, & dans ces cas le rayon de la dévelopée au point A, où ſe trouve le point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, deviendra infiniment petit. On pourra même prendre k plus petit que l'unité, pourvu que la puiſſance x^k ne devienne pas ambigue, ce qui arrive, ſi k eſt une fraction dont le dénominateur eſt un nombre impair. Mais alors la tangente de la courbe au point de rebrouſſement A deviendra perpendiculaire à l'axe AP, au *Fig. 6*

lieu que dans les cas précédens elle tomboit sur l'axe AP même. Dans ces cas il faut remarquer, que le rayon de la dévelopée au point A sera fini si $k = \frac{1}{2}$, (cas qui se trouve exclus,); infiniment petit si $k > \frac{1}{2}$ & infiniment grand si $k < \frac{1}{2}$. Ainsi cette équation $y = \alpha \sqrt[3]{x} + \beta \sqrt[2]{x}$ marquera une telle courbe MAN, qui aura au point A un point de rebroussement de la seconde espece, où le rayon de la dévelopée sera infiniment grand.

§. 19. Il est aussi possible que l'exposant k soit $= \frac{1}{2}$, sans que la puissance $\alpha x^{\frac{1}{2}}$ devienne ambigue : l'ambiguité étant détruite par le terme suivant, comme dans cette équation $y = \alpha \sqrt{x} + \beta \sqrt{x}\sqrt{x}$, où le premier terme $\sqrt{x}$ se trouve dans le second encore après le signe radical, de sorte que si l'on prenoit le premier terme $\sqrt{x}$ negatif, le second en deviendroit imaginaire. Et en effet puisque x a dans le second terme plus de dimensions que dans le premier, cette courbe aura au commencement aussi un point de rebroussement de la seconde espece. Or cette courbe appartiendra au quatrième ordre, puisque son équation étant délivrée des radicaux devient

$$y^4 - 2\alpha\alpha xy^2 - 4\alpha\beta\beta xxy + \alpha^4 xx - \beta^4 x^3 = 0$$

qui paroit être la plus simple courbe douée d'un tel point de rebroussement.

§. 20. Car il est assez évident qu'un tel point de rebroussement ne peut pas avoir lieu dans les lignes du troisieme ordre : puisqu'il est possible de tirer une ligne droite, par un tel point de rebroussement, qu'elle fasse quatre intersections, ce qui demande au moins une ligne du quatrième ordre. Or je ferai voir bientôt, qu'il y a une infinité de lignes du quatrième ordre, qui ont un tel point de rebroussement, & il sera encore incertain laquelle d'entr'elles pourroit être jugée la plus simple : si l'on ne veut regarder dans ce jugement, que l'équation entre les coordonnées, la décision ne sera plus difficile, dès qu'on considérera l'équation générale du quatrième ordre

dre, qui renferme toutes les courbes de cette nature. Par là il eſt aiſé de juger, que dans le cinquième ordre & les ſuivants le nombre de telles courbes ſera encore infiniment plus grand, de ſorte qu'on ne ſauroit plus avoir le moindre doute ſur l'exiſtence de ce point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece de M. le Marquis de l'Hôpital.

§. 21. La derniere formule $y = \alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{x}\sqrt{x}$ ne differe des precédentes, qu'en ce qu'ici l'axe AP eſt perpendiculaire à la courbe, au lieu que dans les précedentes équations elle étoit la tangente même. Car on n'a qu'à changer y & x pour avoir $x = \sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{y}$, & prenant les quarrés on aura $xx = y + 2y\sqrt[4]{y} + y\sqrt{y}$. Donc ſi x & y ſont infiniment petits, on rejettera le dernier terme, & ayant $y = xx$, cette valeur ſubſtituée dans le terme $y\sqrt[4]{y}$ donnera $xx\sqrt{x}$, de ſorte que $xx = y + xx\sqrt{x}$ ou $y = xx \pm xx\sqrt{x}$, qui eſt une des équations precédentes. De même de l'equation générale $y = xx^k + \mathcal{E}x^{k+\frac{m}{n}}$ (17), changeant les coordonnées x & y, on aura $x = y^k + y^{k+\frac{m}{n}}$. Or puisque x & y ſont ſuppoſées infiniment petites, il y aura $y^k = x$ & $y = x^{\frac{1}{k}}$; donc $x = y^k + x^{1+\frac{m}{nk}}$, & $y = \sqrt[k]{(x - x^{1+\frac{m}{nk}})} = x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{m+n}{nk}}$ ou $y = \alpha x^{\frac{1}{k}} + \mathcal{E}x^{\frac{m+n}{nk}}$, équation pour une courbe qui aura au commencement un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, qui eſt perpendiculaire à l'axe.

§. 22. De ces formules il eſt aiſé d'en tirer d'autres, qui contiennent des points de rebrouſſement de cette ſeconde eſpece, dont la tangente faſſe un angle quelconque oblique avec l'axe AP. Pour commencer des cas les plus ſimples, ſoit propoſée cette équation $y =$

Fig. 7. $\alpha x + \beta xx + \gamma xx\sqrt{x}$, & on verra premierement, que la droite AK ſera la tangente de cette courbe au point A, ſi poſant $AP = x$, ſera $PK = \alpha x$. Enſuite qu'on conſtruiſe la parabole AL de ſorte que $PL = \alpha x + \beta xx$, & qu'on prenne $LM = LN = \gamma xx\sqrt{x}$; on obtiendra deux branches AM & AN, qui ſe réüniſſant en A, y auront pour tangente la droite AK, & leur courbure ſera la même, que celle de la parabole AL; de ſorte que la convexité de ces deux branches au *Fig. 8.* point A ſera tournée vers l'axe AP. Or ſi le coëfficient β eſt negatif, cette équation $y = \alpha x - \beta x + \gamma xx\sqrt{x}$ repréſentera un point de rebrouſſement MAN, dont la concavité ſera tournée vers l'axe AP.

§. 23. Cette formule peut être renduë plus générale de cette maniere: $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^{2+\frac{m}{n}}$ en ſuppoſant m un nombre impair & n un nombre pair: on y pourra encore ajouter autant de puiſſances de x qu'on voudra, pourvu que leurs expoſants ſoient plus grands que 2, & dans tous ces cas le rayon de la dévelopée au point de rebrouſſement ſera fini. Or il ſera infiniment grand dans cette équation:

$$y = \alpha x + \beta x^k + \gamma x^{k+\frac{m}{n}}$$

ſi l'expoſant k eſt plus grand que 2; mais infiniment petit, ſi cet expoſant k eſt moindre que 2, mais pourtant plus grand que 1: ou il eſt à remarquer, qu'il peut auſſi être un nombre rompu, pourvu que la puiſſance x^k n'en devienne pas ambigue.

§. 24. Pour rendre ces formules encore plus générales, ſoit P une fonction quelconque de x, qui n'ait aucune ambiguité, laquelle devienne $= 0$ en ſuppoſant $x = 0$. Enſuite ſoit Q une telle fonction ambigue, qu'elle renferme auſſi bien une valeur negative qu'affirmative, ou qui ſoit $\pm Q$, mais qui devienne imaginaire en prenant x negatif, au moins tandis qu'il eſt infiniment petit: & de plus que Q évanouiſſe en faiſant $x = 0$. Cela poſé, il eſt clair, que cette équation:

$= y$

$y = \alpha x + x\,P\,(1 \pm Q)$ désignera une courbe, qui aura au commencement un point de rebroussement de la seconde espece: & cette équation peut être renduë encore plus générale en supposant $y = \alpha x + x\,P\,(1 \pm Q)^n$, n marquant un nombre quelconque tant affirmatif que negatif. La fonction P pourra aussi être ambigue, pourvu que son ambiguité soit détruite par la fonction Q, ce qui arrive si elle renferme $\sqrt{P}$, puisqu'alors P ne peut pas recevoir la valeur negative.

§. 25. On pourroit rendre cette formule encore plus générale en ajoutant à y des fonctions de y, qui évanouïssent par rapport à Px, si l'on met x infiniment petit, mais je ne m'y arrêterai pas, puisque cette formule est déjà suffisante pour trouver une infinité de telles lignes courbes de tous les ordres après le troisieme. Je remarquerai seulement que faisant $n = -1$, $P = x$ & $Q = \sqrt{x}$, on obtient encore une autre courbe du quatrième ordre: $y = \frac{\alpha x x}{1 \pm \beta \sqrt{x}}$: qui sera comprise dans cette équation $(y - \alpha x x)^2 = \beta\beta y y x$, & qui paroit encore plus simple que la précedente. En changeant les constantes pour remplir l'uniformité, elle sera $a a y y - 2 a y x x + x^4 = b x y y$.

§. 26. Par le moyen de ces formules il sera donc aisé de fournir une infinité de lignes courbes, qui auront un tel point de rebroussement de la seconde espece. Mais il n'en sera pas de même de la question inverse, si l'on veut juger, l'équation pour une courbe étant donnée, si cette courbe aura un tel point de rebroussement, ou non? Pour déterminer le point de rebroussement ordinaire, on a coutume de chercher l'endroit, où le differentiel second de l'une des coordonnées, ou évanouït, ou devient infini; puisque dans cet endroit là le rayon de la courbure est toujours, ou infini, ou egal à zero Mais dans le point de rebroussement de la seconde espece le rayon de la courbure est tantôt fini, tantôt infiniment grand, tantôt infiniment petit; de sorte que ce point n'est pas attaché à une certaine proprieté des differentiels seconds.

On

On ne ſauroit non plus rien conclure des differentiels du troiſiéme ou de quelqu'ordre plus haut, puisqu'on pourra toujours aſſigner de tels points de rebrouſſement, où tous ces differentiels ont des valeurs quelconques.

§. 27. Ne voyant donc aucune methode ſûre pour découvrir cette eſpece de points de rebrouſſement, par quelque propriété des differentiels, on ſera obligé de ſe tenir à l'analyſe des finis, ou de tirer le jugement de l'équation en termes finis de la courbe. Or d'abord il eſt évident, que ce point de rebrouſſement eſt un point double de la courbe, & partant il faut commencer par chercher tous les points doubles qui peuvent ſe trouver dant la courbe propoſée, & enſuite le jugement, ſi un tel point double eſt en même tems un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, ne ſera plus difficile. Or pour reconnoitre les points doubles on peut faire uſage des differentiels; car ayant differentié l'équation propoſée entre les coordonnées x & y, on ſuppoſera ſéparément égaux à zero, tant les termes qui contiennent les dx, que les dy: & les cas, où ces deux équations jointes à l'équation même de la courbe, auront les mêmes racines, montreront tous les points doubles, qui ſe trouvent dans la courbe propoſée.

§. 28. Par cette methode ayant decouvert les points doubles de la courbe propoſée, on jugera de chacun, s'il eſt un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, ou non, de la maniere ſuivante. On tirera par le point double à volonté une droite, qu'on regardera comme l'axe, ſur lequel on prendra depuis le point double les abſciſſes, qui ſoient $= x$, & les appliquées $= y$, qu'on fera, ou perpendiculaires, ou inclinées ſous un angle quelconque à l'axe. Cela fait, l'équation pour la courbe entre x & y ſera toujours telle, qu'il ne s'y trouvera, ni aucun terme conſtant, ni les termes où x & y n'ont qu'une ſeule dimenſion, & partant l'équation, qui réſulte, ſera toujours compriſe dans cette forme générale.

$$0 = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 y + \zeta x y^2 + \eta y^3 + \vartheta x^4 + \iota x^3 y + \&c.$$

Car

Car toutes les fois que dans l'équation manquent le terme conſtant & les termes x & y, c'eſt une marque ſeure, que la courbe aura au commencement, où $x = 0$ & $y = 0$, un point double, ou une interſection de deux branches.

§. 29. Enſuite on ſuppoſera x & y infiniment petits pour avoir cette équation $0 = \alpha xx + \beta xy + \gamma yy$, dont les racines $y = -\frac{\beta x}{2\gamma} \pm x\sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)}$ marqueront les tangentes des branches, qui s'entrecoupent au commencement. Donc ſi ce point double eſt un point de rebrouſſement, il faut que ces deux tangentes ſoient les mêmes, ce qui arrive ſi $\beta\beta = 4\alpha\gamma$. Par conſéquent s'il n'y a pas $\beta\beta = 4\alpha\gamma$, ou ſi l'equation, en ſuppoſant x & y infiniment petits, n'aura point deux racines égales, ce ſera une marque ſure, que le point double n'eſt pas un point de rebrouſſement, ſoit de la première ou de la ſeconde eſpece. Il ne reſte donc que le cas de deux racines égales pour entrer dans le jugement, s'il y a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ou non.

§. 30. Mais ſi les deux tangentes conviennent, on pourra prendre cette commune tangente pour axe, & alors l'équation pour la courbe aura cette forme.

$$0 = Ayy + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3 + Fx^4 + Gx^3y + \&c.$$

Maintenant il faut voir, ſi les deux branches ont tourné leur courbure du même coté. Pour cet effet il faut, que dans la ſuppoſition de x infiniment petit, en négligeant tous les termes, qui évanouïſſent par rapport aux autres, la valeur de y ne devienne pas ambigue, c'eſt à dire, il faut qu'il ſoit ou $y = \alpha xx$, ou $y = \alpha x^3$; ou $y = \alpha x^4$ &c. Soit $y = \alpha xx$, ce qui eſt le cas où le rayon de la developée devient fini, & alors on aura en négligeant les dimenſions plus hautes que la quatrième.

$$0 = \alpha^2 Ax^4 + Bx^3 + \alpha Cx^4 + Fx^4$$

donc il faut qu'il ſoit $B = 0$, & que α n'obtienne pas une valeur double de l'equation $\alpha^2 A + \alpha C + F = 0$, ou que $CC = 4AF$, de ſorte que $Ayy + Cxxy + Fx^4$ devienne un quarré.

§. 31. Donc à moins que l'équation n'ait pas cette forme

$$(y - \alpha xx)^2 = Bxy^2 + Cy^3 + Dx^3y + Exxyy + Fxy^3 + \&c$$

la courbe n'aura pas un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece Mais cela ne ſuffit pas encore; il faut outre cela, que dans l'expreſſion $Bxy^2 + Cy^3$ &c. ſi l'on met $y = \alpha xx$, la plus baſſe puiſſance de x ſoit impaire. Par là on comprend aiſément, que ſi l'équation étoit $(y - \alpha x^3)^2 = Bxy^2 +$ &c. cette partie doit avoir toujours la même propriété, qu'après avoir fait $y = \alpha x^3$ la plus baſſe dimenſion de x ſoit impaire & plus haute que x^6 ; & cette même maxime ſe doit obſerver dans les équations plus compliquées ; de ſorte que le jugement du point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ne ſera jamais difficile en ſe ſervant de cette maniere.

§. 32. De là nous pourrons donner une équation générale pour toutes les lignes du quatrieme ordre, qui auront un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece ; laquelle ſera

$$(y - \alpha xx)^2 = Axy^2 + By^3 + Cx^3y + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4.$$

Car cette derniere partie $Axy^2 + By^3 + Cx^3y$ &c. deviendra au commencement où $y = \alpha xx$ égale à

$$\alpha^2 Ax^5 + \alpha^3 Bx^6 + \alpha Cx^5 + \alpha^2 Dx^6 + \alpha^3 Ex^7 + \alpha^4 Fx^8$$

& partant en négligeant les plus hautes puiſſances de x, l'équation ſera pour le commencement

$$(y - \alpha xx)^2 = \alpha\ (\alpha A + C)\, x^5 \quad \text{ou} \quad y = \alpha xx \pm xx\sqrt{\alpha(\alpha A + C)x}.$$

Donc

Donc pourvu que $\alpha A + C$ ne ſoit pas égal à zero, les lignes compriſes dans l'équation générale donnée auront un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece. Par conſéquent cette propriété aura lieu toutes les fois, qu'il n'y a pas $C = -\alpha A$; & alors ce point de rebrouſſement ſera de cette nature $y = \alpha xx + \mathfrak{G} xx\sqrt{x}$.

§. 33. Mais quand $C = -\alpha A$, il y aura encore des cas, où l'équation :

$$(y-\alpha xx)^2 = Axy(y-\alpha xx) + By^3 + Dxxyy + Exy^3 + Fy^4$$

contient des courbes d'un tel point de rebrouſſement. Pour trouver ces cas, on n'a qu'à ſuppoſer, pendant que x eſt conſidéré comme infiniment petit :

$$y = \alpha xx + \beta x^3 + \gamma x^3\sqrt{x}.$$

& apres avoir déterminé β & γ on parviendra à cette equation :

$$(y-\alpha xx-\tfrac{1}{2}Axy)^2 = Byy(y-\alpha xx)+Exy^3+Fy^4$$

qui renferme encore une infinité d'autres courbes, qui ont toutes un tel point de rébrouſſement. Donc en regardant la ſimplicité de l'équation, il n'y a aucun doute que cette ligne $(y-\alpha xx)^2 = Axyy$ ou $y = \frac{\alpha xx}{1-\sqrt{Ax}}$ ne ſoit la plus ſimple qui ait cette propriété.

§. 34. Soit propoſée pour donner un exemple de la methode, que je viens d'expliquer, cette ligne du cinquiéme ordre, dont l'équation eſt :

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)^2 = 2aaxx - x^4 - 2xxzz.$$

Pour trouver ſi cette courbe a un point de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, je cherche premierement, ſi elle a un point double. Pour cet effet l'équation propoſée donnera par la différentiation en ſuppoſant x conſtant :

$$-4\left(1-\frac{x}{a}\right)(aa-zz)\,zdz+4xxzdz=0.$$

Or en ſuppoſant z conſtant nous aurons :

$$-\frac{dx}{a}(aa-zz)^2=4aaxdx-4x^3dx-4xzzdx.$$

A ces trois équations ſatisfont ces valeurs :

$$x=0 \quad \& \quad z=\pm a.$$

§. 35. Cette courbe aura donc deux points doubles, & pour chercher la nature de chacun, je ſuppoſerai $z=a-y$, car il eſt clair de l'équation propoſée, puiſqu'elle a un diametre ſur lequel ſont priſes les abſciſſes x, que ces deux points doubles ſeront ſemblables entr'eux. Or poſant $z=a-y$, nous aurons cette équation :

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)yy(2a-y)^2=2aaxx-x^4-2xx(a-y)^2$$

ou bien :

$$4aayy-4ay^3+y^4-4axyy+4xy^3-\frac{xy^4}{a}-2aaxx+x^4=0$$
$$-4axxy+2xxyy \quad +2aaxx$$

& partant.

$$(2ay-xx)^2=4ay^3+4axyy+y^4+4xy^3+2xxyy-\frac{xy^4}{a}$$

D'où il eſt clair que cette courbe a deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece.

§. 36. Pour connoitre la figure de cette courbe, on n'a qu'à chercher la valeur de zz de l'équation propoſée, qu'on trouvera $zz=aa-\frac{axx\pm x^2\sqrt{ax}}{a-x}$, ou $zz=aa-\frac{xx\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{x}}$. De laquelle on tire les endroits où l'appliquée z evanouït, par le moïen de cette équation $aa\sqrt{a}\mp aa\sqrt{x}-xx\sqrt{a}=0$ ou $(aa-xx)^2=a^3x$ qui a deux racines réelles qui ſont :

$$x=0,5248876a; \ \& \ x=1,4902162a.$$

Enſuite

Enſuite la valeur de dz ſera $= 0$, dans le cas $\sqrt{x} = \frac{4}{3}\sqrt{a}$ ou $x = \frac{16}{9}a = 1,7777\,a$; & la valeur de dx ſera $= 0$, où $z = 0$, c.à.d. où la courbe coupe l'axe. Mais ſi nous ſuppoſons $x = \frac{16}{9}a$, nous aurons ou $zz = \frac{283}{27}aa$ ou $zz = -\frac{57}{189}aa$, dont la derniere valeur eſt imaginaire. Enfin on voit que la courbe aura auſſi une aſymtote perpendiculaire à l'axe, ou $x = a$.

§. 37. Cette courbe eſt repréſentée dans la 9me figure, où CO eſt l'axe & en même tems le diametre de la courbe, C le commencement des abſciſſes x. Les points A, A ſont les deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece, que nous venons de trouver étant AC $= a$. Les deux branches qui conſtituent ces points de rebrouſſement, forment la lunule ABADA. Outre cela prenant CE $= a$, la droite FEF perpendiculaire à l'axe CO ſera une aſymtote de deux autres branches IHK & IHK, qui de K, K vont en divergeant à l'infini, ayant en H, H leur plus petite diſtance à l'axe CO. On voit auſſi qu'on peut tirer une droite, qui coupe cette ligne courbe en 5 points, ſuivant la nature des lignes du 5me ordre. *Fig. 9.*

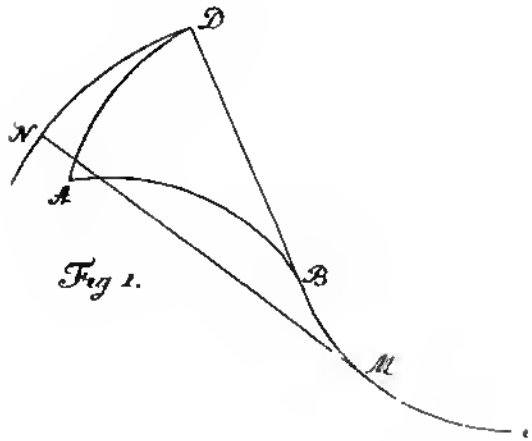


Fig 1.

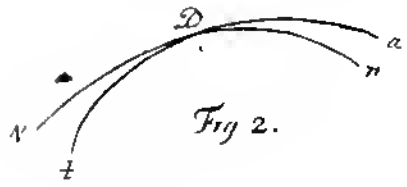


Fig 2.

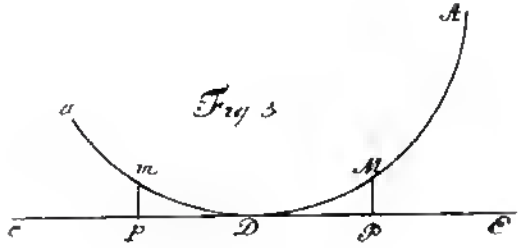


Fig 3

Fig 4

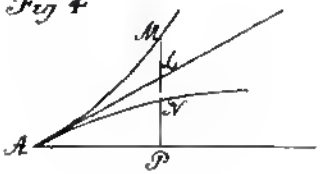
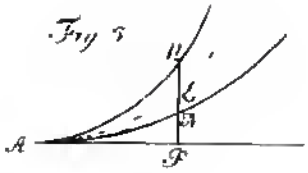


Fig 5



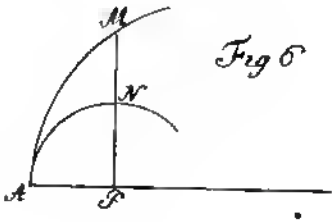


Fig 6

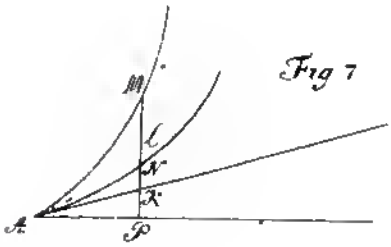


Fig 7

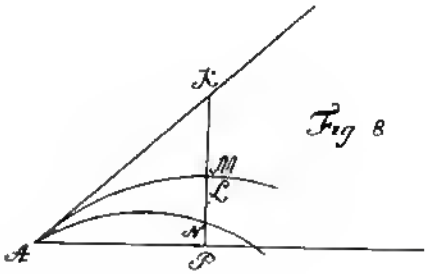


Fig 8

Mem. de l'Acad. Tom V pag 203.

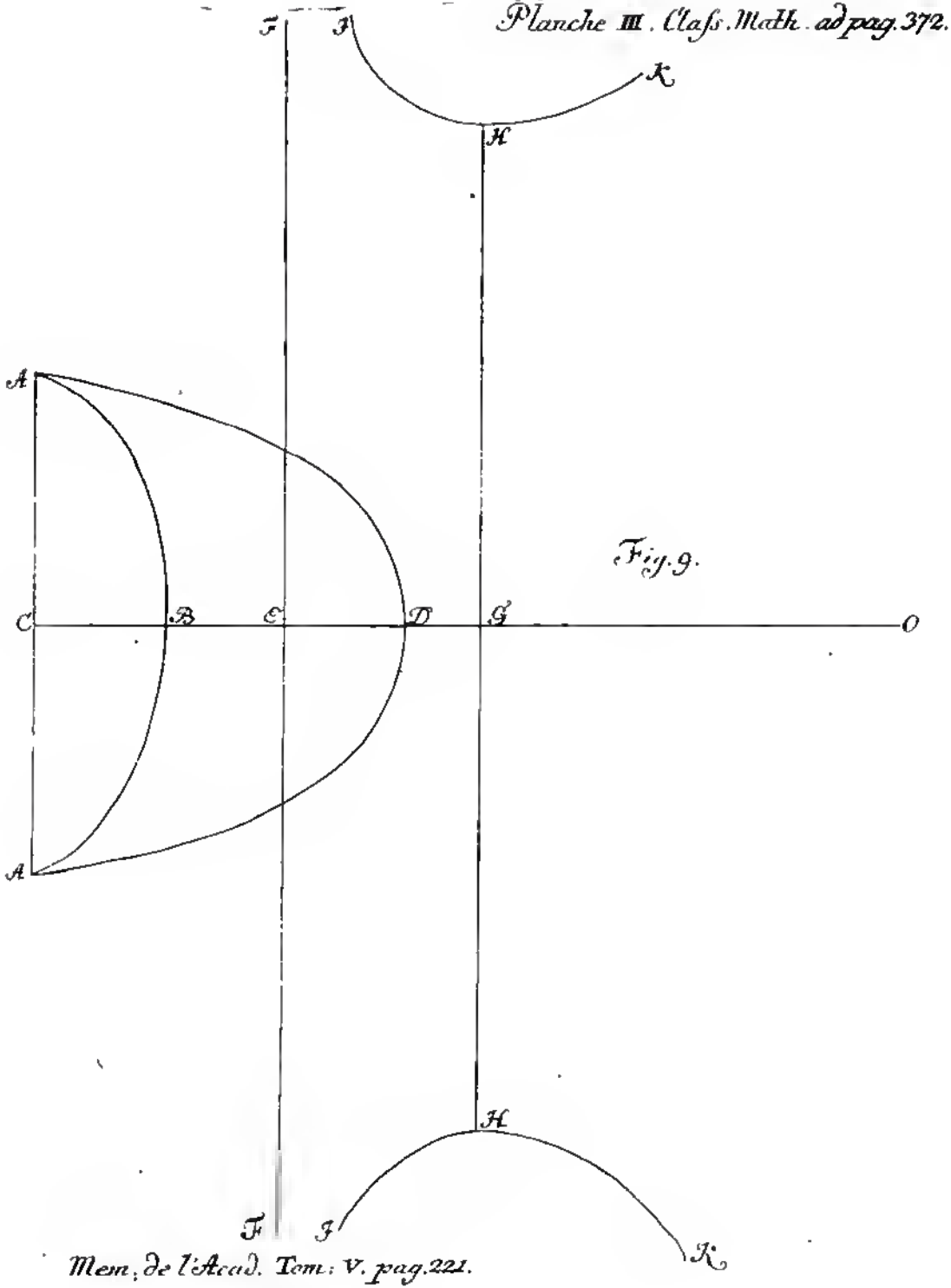


Fig. 9.